Конспект по курсу:
«Теория систем и системный анализ»

Элементы общей теории систем как теории построения абстрактных моделей систем объектов, явлений и процессов (СОЯП)

Вступление

Модели, необходимые для решения прикладных задач самого разнообразного характера. Нас будут интересовать модели, которые пригодные для решения задач управления и задач принятия решений.

В курсе будут рассмотренные основные принципы построения модели, вопросы технологии моделирования и методы и способы обработки моделирования.

Модели и способы их построения

Чаще всего логика проведения исследований при построении модели следующая:

1. если есть количественные переменные, то их всегда возможно выразить качественно;
2. если есть количественные переменные, то всегда возможно определить зависимость между ними; и таким образом построить модель на элементарном уровне с последующим использованием ЭВМ.

Существует немало проблем при решении которых такой подход удачной. Однако, имеют место следующие недостатки:

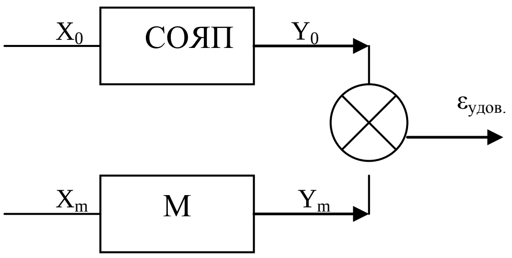
1. для измерения необходимо иметь адекватный измерительный аппарат;
2. при построении модели необходимо иметь достоверные способы проверки надежности и адекватности модели.

Математические модели в общем случае разрабатываются для двух целей:

1. для лучшего понимания, объективно существующей реальности СОЯП с целью следующего управления ею;
2. для разработки рационального курса действий, то есть для принятия решения.

Задача построения надежной комплексной модели может быть очень трудной. Для моделей многих систем, которые включают в себя людей, возможные такие явления как отсутствие четких связей, например, отсутствие их при повторяемых наблюдениях.

Общий вид структуры модели:



Если $\varepsilon_{удов.}$ удовлетворяет нас, то такая модель называется правильной.

Использование таких моделей, например, для цели управления моделями, довольно проблематично:

1. проблема измерения (при сравнении). Для указанных прежде слабоструктурированных систем исследователь сталкивается с большим числом переменных, для которых, как правило, существуют способы качественных оценок, и, таким образом, в таких моделях необходимо использовать качественные оценки.
2. построение функциональных зависимостей
3. оценка времени жизни модели

Возможность построения надежных количественных моделей определяется следующими факторами:

1. возможность надежного измерения количественных переменных
2. наличие фактической данных, необходимых для проверки и воспроизведения функциональных зависимостей
3. относительная возможность структуры модели и стабильность ее, кроме того, надежность использования количественных моделей определяется оценкой возможной динамики системы в будущем.

Системы и их модели

Определением понятия системы и исследованием свойств системы занимается наука – общая теория систем.

Существует несколько подходов в определении понятия системы:

Система (с гр. “склад”) – кое-что сборное с их частей и их соединений, которые представляют собой единство явлений, закономерно, связанных друг с другом , а также знаний о природе и обществе. Более простое теоретико-множественное определение системы следующее:

Система – множество элементов, которые образовывают структуру и обеспечивают ее поведение в некоторой среде.

Математическое определение:

$$S'(S) = \{E, ST, Q, B(t)\}$$

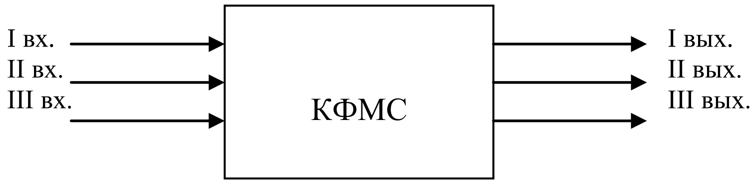
E – множество объектов
ST – структура, которая объединяет эти объекты
Q – среда
B(t) – динамика развития
С позиции теории управление система определяется в следующей форме:

$$S'(S) = \{X, Y, H\}$$

Канонические модели сложных систем

Классической канонической моделью системы называется такая упрощенная форма представления системы, которая при данном рассмотрении отображает наиболее общие свойства без потери всеобщности представления о ней.

Рассмотрим в самом общем виде каноническую форму модели сложной системы:



Первый вход и первый выход – это безинерционные вход/выход системы.
Второй вход и второй выход – это вход/выход несущие информацию.
Третий вход и третий выход – это входные и выходные объекты.

<u>Пример1:</u>
Пусть мы рассматриваем процесс обработки информации на ЭВМ. Тогда
I вх. – характеристики источников питание.
I вых. – теплоотдача в помещении.
II вх. - информация про входные данности устройств. Обработка и выдача данных.
II вых. – сигналы на устройстве отображения.
III вх. – дискета.
III вых. – распечатанный материал.

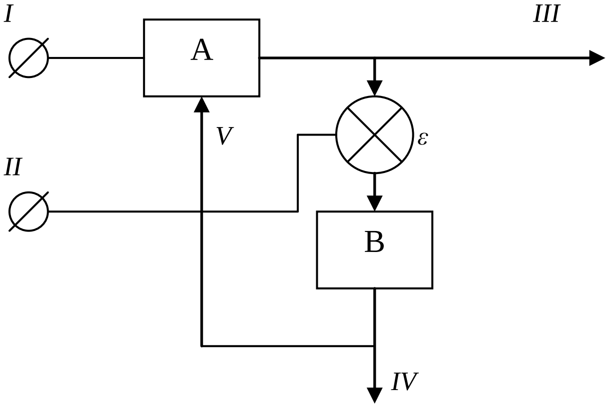
<u>Пример 2:</u>
Экономическая модель.
С математической точки зрения наибольший интерес среди экономических систем представляют разные модели процессов планирования. Тогда:
I вх. – это критерий оптимизации , который определяется необходимостью развития экономики.
I вых. – алгоритм решения.
II вх. – трудовые ресурсы.
II вых. – статистические планы по выполнению планов.
III вх. – стимул.
III вых. – процесс роста экономической системы.

<u>Пример 3:</u>
Система управления организации.
Основной целью системы организационного типа является автоматизация процессов принятия решений и ее усовершенствования.
Одним из возможных вариантов процесса принятия решений будут:
1) *определение цели;*
2) *обнаружение проблемы;*
3) *поиск решения;*
4) *выбор решения;*
5) *оценка решения;*
6) *согласование решения;*
7) *утверждение решения;*
8) *реализация решения;*
9) *управление процессом выполнение решение;*
10) *проверка эффективности*

I вх. –цель организации
I вых. –алгоритм решения проблемы

II вх. – ресурсы динамики проблемы
II вых. - качество и количество решений
III вх. – устройства обзора среды и сбора данных
III вых. – результат

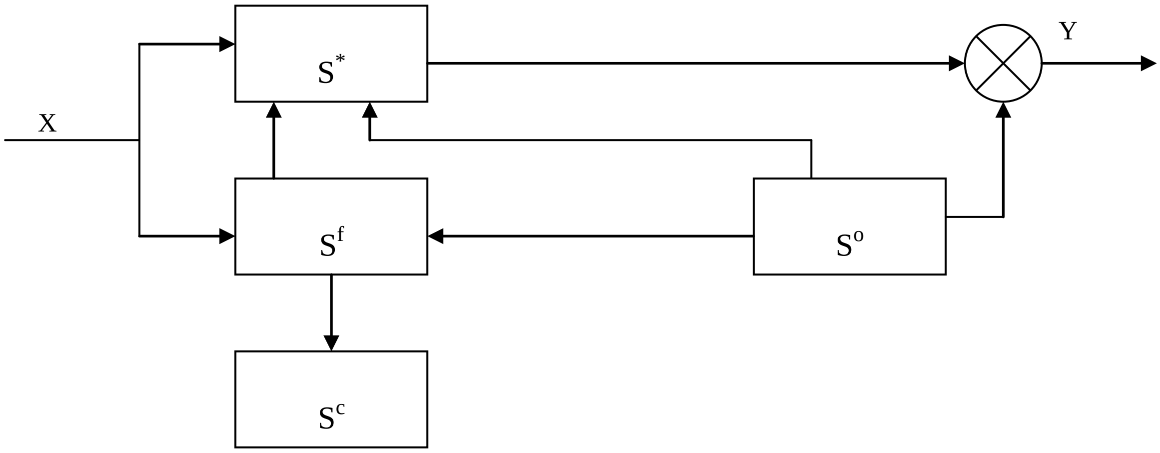
Рассмотрим структурную схему системы управление организацией. Она может быть представлена в виде:



A – реакция организации
B – процесс принятия решения
I вх. – влияние окружающей среды
II вх. – предвиденная прибыль
III – фактический результат
? – проблема
IV – решение проблем
V – обратная связь
Такую схему предложил Янг.

Многосвязная динамическая система

Многосвязная динамическая система может быть представлена в виде следующей подсистемы:



S^* - Подсистема управляема и наблюдаема
S^f – Подсистема управляема и не наблюдаема
S^o - Подсистема не управляема и наблюдаема
S^c – Подсистема не управляема и не наблюдаема

<u>Методика системного моделирования</u>

Модели и моделирование, основная терминология

Подобие - взаимнооднозначное соответствие между двумя объектами или системами, при котором функции, характеризующие переход от одних параметров к других, известные, а между математическими описаниями этих объектов установленные тождественные отношения.

Модель – некоторый объект, процесс, система, знаковое образование, которое находится в отношении сходства к исследуемому сходству.

Моделирование – исследование на модели, которая подобная к объекту.

Виды подобий:

1. Точное подобие – подобие между всеми элементами исследуемого объекта и модели при котором функции перехода от одних параметров к другому на модели не изменяются. Такое подобие называется *подобием с точностью до изоморфизма.*
2. Приближенное подобие - подобие, которое допускает нарушение взаимнооднозначного соответствия между объектом и моделью, нарушение процессов, протекающих в модели при сравнении с исследуемым объектом может быть оценено аналитически или экспериментально.
3. Физическое подобие – подобие между исследуемым объектом и моделью, которые имеют одну и ту же физическую природу.
4. Структурное подобие – подобие структур между исследуемым объектом и моделью.
5. Функциональное подобие – подобие функции, которые выполняются исследуемым объектом и моделью при одних и тех же входных сигналах.
6. Математическое подобие – подобие между величинами, которые входят в математическое описание исследуемого объекта и модели при одних и тех же входных сигналах.
7. Динамическое подобие – подобие между последовательными состояниями исследуемого объекта и модели.
8. Вероятностное подобие - подобие между вероятностными характеристиками исследуемого объекта и модели.
9. Геометрическое подобие – подобие между пространственными характеристиками исследуемого объекта и модели.

Виды моделирования

Виды моделирования определяются в соответствии с видами сходства.

Например, точное моделирование - это моделирования, при котором реализуется точное сходство.

Критерий сходства - это некоторый безразмерный, как правило, степенной комплекс, который является функцией координат исследуемого объекта.

Уравнение сходства - это математическая модель, которая устанавливает связь между описанием исследуемого объекта и критерием сходства.

Погрешность модуляции – это расхождения между соответствующей действительности значениями характеристик исследуемого объекта и тех же характеристик на модели.

Систематическая погрешность – это погрешность, которая возникает под действием определенных известных факторов, которая может быть учтена априорно с помощью коррекции их принятии.

Предельные условия – это условия определяющие значения характеристик моделей на границе, которая определяет область её функционирования.

Идентификация – это процесс отождествления характеристики объекту или его структуры в их математической модели.

Задача идентификации – относится к обратным задачам управления. Различают:

- параметрическую идентификацию; если структура модели исследуемого объекта известная с точностью до параметра, тогда необходимо определить неизвестные параметры системы
- структурную идентификацию; это процесс, который определяет структуру модели исследуемого объекта
- структурно-параметрическая идентификация

Чаще всего мы будем работать с следующими моделями:

1) статистические

$$Y=KX$$

2) динамические

$$T\dot{Y} + Y = KX$$

3) логико-динамические
4) вероятносные.

Количественная оценка степени идентичности модели и исследуемого объекта

Известно, что при моделировании вероятных моделей заведомо не известная ни степень, ни форма зависимости между отдельными входными переменными, а также между входными и выходными переменными. Конечно, что мы хотим построить модель с учетом не всех переменных, а с учетом по возможности меньшей их количества.

Однако, это количество входных переменных должна определять исходную переменную с точностью не больше допустимой погрешности.

После выбора определенного числа входных переменных и построения по ним модели возникают задачи определения степени соответствия модели к реально исследуемого объекту. Решение такой задачи имеет большое практическое значение, так как разрешает определить правильность выбора тех или других переменных.

Пусть вектор входных переменных имеет вид:

$\overline{X}(t) = \{X_1(t),..., X_n(t)\}$,

а вектор выходных переменных:

$\overline{Y}(t) = \{Y_1(t),..., Y_m(t)\}$, где m ≤ n. Тогда можно последовательно определить значения оператора связи $a_{i,j}$ j - й выходной переменной от влияния i-й входной переменной.

$Y_j^* = A_{i,j}^*(x_i)$, если данное распределение системы двух случайных величин X_1 на X_2 то регрессией X_1 на X_2 называется произвольная функция $g_2(x_1)$ приближенно представляющая статистическую зависимость вида:

(1) $x_2 = g_2(x_1) + h_2(x_1 x_2)$, где $h_2(x_1 x_2)$ есть поправочными слагаемыми. В вообще среднеквадратичная регрессия x_2 на x_1 минимизирует квадрат отклонения вида

$$M[x_2 - g_2(x_1)]^2 = M[h_2(x_1 x_2)]^2$$

и кривая от X_2 носит название **среднеквадратичной регрессии**. Базируясь на парных результатах $M\{y_j(t) / x_j(t)\}$ может быть построенная множественная регрессия $M\lfloor y_j / x_1 ... x_n \rfloor$, которая, как правило, заменяется упрощенной $M\lfloor y_j / x_1 ... x_p \rfloor$ p<<n .Тогда оператор связи может быть оптимальной в понятии минимального среднего квадрата ошибки.

$$y_j^* = A_i^*\{x_1 ... x_p\} = M[y_j / x_1 ... x_p] \quad \textbf{(2)}$$

В этом выражении учитывается общее влияние на выходную переменную Y_j всех учтенных P входных переменных.

Для того чтобы задача установления числа переменных P в выражении (2) стала определенной, необходимо задать некоторые требования к выходных переменных Y_j. Обычно в качестве такого указателя рядом с мат. ожиданием используется дисперсия или корреляционная функция, которая заданная раньше. Дисперсия выходной переменной характеризуют точность, а корреляционная функция - те связи, которые присущи выходным переменным.

Общая дисперсия выходных переменных состоит из двух слагаемых:

$$D\{y_j(t)\} = M\{[M\{y_j(t) / x_1 ... x_p\} - M\{y_j(t)\}]^2\} + M\{[y_j(t) - M\{y_j / x_1 ... x_p\}]^2\} \qquad \textbf{(3)}$$

Первое слагаемое вызван влиянием P переменных, второй - учитывается влияние на формирование выходной переменной (n-p) переменных которые осталось.

Выходная переменная из выражения (3) должна удовлетворять соотношение

$$M\{[y_j(t) - M\{y_j / x_1 ... x_p\}]^2\} \leq D з(y_j(t)) \quad \textbf{(4)}$$

где Dз – заданная дисперсия

Очевидно, что если условие (4) выполняется при P=1, то достаточно модели, построенной с учетом одной переменного. Практически может быть такой случай, если введение новой переменной не приводит к достижению заданной цели. В таком случае необходимо изменить требования к представлению исходных переменных. Постановка задачи здесь должна быть связана с поиском оптимизации, то есть использование такого критерия, который обеспечит необходимые представления.

В конечном случае роль пойдет о количественной оценке идентичности модели и объекта. Таких критериев можно подобрать немало, мы же используем дисперсионную меру:

$$Q\{y_j(t)\} = \frac{D\{M\lfloor y_j / x_1 ... x_p \rfloor\}}{D\{y_j\}}$$

если P=n, то Q=1

P≠n, nj 0<Q<1

Объекты, для которых Q=1 называются регулярными или детерминированными (полностью определенными)

Q=0 - нерегулярные, стахостическими, случайные.

Оценка адекватности модели может быть:

1) Оценка адекватности концептуальной модели
2) Оценка достоверности ее реализации.

Фиксация и обработка результатов моделирования

В результате моделирования некоторых процессов мы получаем информацию, которую необходимо соответствующим образом обрабатывать. Очевидно, что процесс обработки нужно построить так, чтобы оценочные характеристики формировались в ходе моделирования и не требовали запоминания статистической информации по системе.

Рассмотрим характерные приемы формирования таких оценок:

1. Пусть в качестве искомой моделированной величины выступает вероятность прихода конкретного события А. Например, вероятность срыва производства, брака и др. Как известно, в качестве оценки для искомой вероятности используется частота наступления события А в процессе некоторого числа реализаций.

$$P(A) = m/N$$

где N - общее число реализаций, а m - число реализаций, при которых наступило событие А.
Вероятность формируется по ходу моделирования.

2. Пусть X - некоторая случайная величина и мы хотим оценить вероятность возможных значений случайной величины, то есть закон распределения

$$\Phi(x) = P(x < X)$$

Для этого весь интервал возможных значений случайной величины разбивают на некоторое число n и в соответствующих ячейках памяти накапливают некоторое значение m_k, где к=1, ... ,n, которые свидетельствуют о попадании случайной величины в данный интервал.

3. Для оценки среднего значения случайной величины используется формула:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

4. Значение выборочной дисперсии определяется по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{k}^{n}(x_k - \overline{x})^2$$

5. Корреляционные моменты двух случайных величин записываются в виде:

$$\overline{K}_{\varphi\eta} = \frac{1}{N}\sum_{k}^{N}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})$$

$$K_{\varphi\eta} = \frac{1}{N}\sum_{k}^{N} x_k y_k - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \sum_{k=0}^{N} y_k$$

1. Пусть искомыми величинами будут мат. ожидание и корреляционные функции случайных процессов. Для определения искомых характеристик интервал разбивается на ряд участков. На любом из них проводится обработка данных на базе выше указанной формулы, то есть мы накапливаем:

$$\sum x_i(t_k) \text{ та } \sum x_i^2(t_k) \text{, тогда}$$

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t_k) \ ;$$

по всем среднем может быть построенная крива, аналогично может быть записана и оценка дисперсии:

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2(t_k) - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i(t_k)\right)^2$$

В частном случае процессы, которые рассматриваются, есть стационарными случайными процессами, если они владеют качествами эргодичности, то есть среднее по множеству тождественно среднему по времени. Поэтому для оценки искомых величин может быть выбрана одна достаточно длинная реализация, для которой $m_k = \frac{1}{N}\int_0^r x(t)\,dt$

или для некоторой совокупности $x(t_i)$ выражение примет вид: $T = N\Delta t$

$$\overline{x}(t) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N} x(t_i)\Delta t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x(t_i)$$

Точность и объем имитационных экспериментов

Нам необходимо провести определенное количество экспериментов с целью получения заданной статистической точности получения результатов.

Например: пусть нам необходимо оценить некоторый параметр α, проведя серию опросов и получая выборку x_i. Определим $\overline{X}$. И тогда возникает задача обеспечить оценку параметра α среднего значения $\overline{X}$ с точностью ε : $\left|a-\overline{x}\right|<\varepsilon$.

Вероятность того, что данное условие выполняется будем называть достоверностью, а величину α - достоверным интервалом:

$$p[|\,a-\overline{x}|<\varepsilon]=\alpha$$

Дадим этой функции частотную интерпретацию, то есть если для оценки параметра α систематически использовать величину среднего значения с точностью α и достоверностью ε, то на каждые 100 случаев использования данного интервала 100α раз условие будет выполняться, и $100(1-\alpha)$ не будет выполняться.

Случай 1.:

Рассматривается вероятность выполнения некоторой задачи. Мы ее отождествляем с вероятностью появления некоторого события А, тогда целью моделирования является оценка вероятности появления этого события. В процессе реализации можно события А поставить в соответствие некоторую величину ξ, которая принимает значения:

$\xi=0$ с вероятностью Р

$\xi=1$ с вероятностью (1-Р),

тогда мат. ожидание равняется:

$$M_\xi=\xi_1 P+\xi_2(1-P)=P$$

Соответственно дисперсия:

$$D_\xi=\sigma^2=[\xi_1-M_\xi]P+[\xi_2-M_\xi]^2(1-P)=P(1-P)$$

Также мы показали, что для оценки вероятностей может быть использованная частота, которая в нашем случае не что другое как

$$\overline{P}=\frac{m}{N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i$$

а если это так, то

$$M\left[\frac{m}{N}\right]=P\ ;\ D\left[\frac{m}{N}\right]=\frac{\sigma}{N}=\frac{P(1-P)}{N}=\sigma^2$$

Используя центральную предельную теорему, можно утверждать, что при достаточную большом числе реализаций N частота $\dfrac{m}{N}$ направляется к нормальному распределению, и соответствующим условием этой вероятности будет:

$$P\left[\left|\frac{m}{N}-P\right|<t_k\sigma\right]=\alpha$$

где t_k - квантиль нормального распределения, где $\varepsilon=t_k\sigma$ - квантиль t_k определяется соответствующим значением достоверного интервала, и находится по таблице, так как они связаны между собою функцией Лапласа.

Случай 2.:

Пусть нас интересует проблема оценки некоторой случайной величины (некоторый показатель эффективности системы, связанный функцией с ее параметром), дальше все проходит по предшествующему случаю:

$$E=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E_i$$ - оценка среднего по числу реализаций.

По центральной предельной теореме при достаточно большом среднем арифметическом мы имеем распределение, близкий к нормального с мат. ожиданием и дисперсией соответственно:

$$M(\overline{E})=mE$$

$$D\overline{E}=\frac{\sigma^2 E}{N}$$

и выполняется условие для вероятности, что

$$P\left[\left|\bar{E}-m_E\right|<t_k\frac{\sigma_E^2}{\sqrt{N}}\right]=\alpha$$

$$\varepsilon=t_k\frac{\sigma_E}{\sqrt{N}} \qquad N=t_k^2\frac{\sigma_E}{\varepsilon^2}$$

Замечание 1:

Как в первому, так и в втором случае число реализаций N зависит от независимой P та σ, которые мы бы хотели оценить.

Для определения этого используется метод предварительной пристрелки, то есть используется N_0 опросов.

Определяется или оценка частоты, или дисперсии $\bar{p}=\dfrac{m}{N_0}$, $\bar{\sigma}$. После этого эти величины подставляют в исходные формулы и рассчитывают N.

В (2) случае иногда проверяют неравенство $t_k^2 s^2<\varepsilon^2$.

Замечание 2:

Для того, чтобы объем испытаний N был по возможности меньшим, желательно оценивать параметры тех случайных величин, которые имеют дисперсию и вероятность близкую до 0,5.

Математические модели элементов сложной системы

Неоднородность назначения элементов сложных систем приводит к разнообразию математических моделей. С одного стороны они могут объективно описывать процессы системы, а из другой, удобные для рассмотрения. Часто элементы сложных систем классифицируют по содержательному принципу, определяя классы:

1) система автоматического управления - САУ (сюда относятся и следящие системы)
2) конечные автоматы;
3) вероятносные автоматы;
4) системы массового обслуживания – СМО;
5) системы передачи и обработки информации;
6) системы управления с запасами;
7) производственные системы и т.д.

Используют также классификацию по исследуемой математической модели:

1. дифференциальные уравнения;
2. общие динамические системы;
3. случайные процессы.

Методы построения математической модели условно распределенные на:

- аналитические;
- численные методы;
- эмперико-статистические методы;

Задачи массового обслуживания

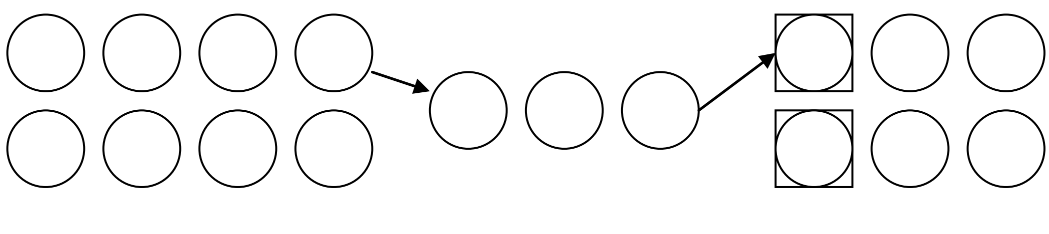
Задачи массового обслуживания условно делят на

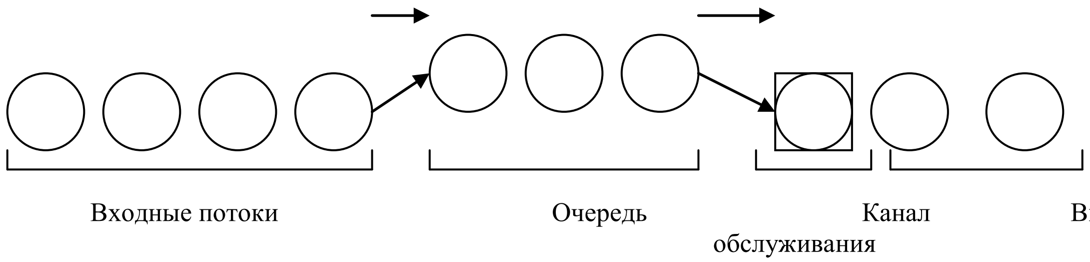
- задачи анализу;
- задачи синтезу;

Задачи анализа используют оценку эффективности функционирования системы массового обслуживания при неизменных, заведомо заданных входных характеристиках системы; структуры системы; дисциплины обслуживания; потоках требований и законов распределения времени их обслуживания.

Задачи синтеза направленные на поиск оптимальных параметров системы массового обслуживания. Систему массового обслуживания в общем случае можно представить как совокупность последовательно связанных между собою входных потоков требований на обслуживание очередей, каналов обслуживания и выходных потоков требований.

Схемы системы обслуживания:





Случайных характер входного потока требований, а также время обслуживания каналов, приводит к образованию случайного процесса, которого нужно, исследовать.

Классификация систем массового обслуживания

Если исследованные или заданные потоки входных требований, механизм (число каналов обслуживания, время обслуживания и др.) и дисциплина обслуживания, то это дает базис для построения математической модели системы.

В задачах анализу систем массового обслуживания в качестве основных показателей функционирования системы могут быть использованы:

1) вероятность простоя P_0 канала обслуживания;
2) вероятность того, что в системе находятся n требований (вероятность P_n):
3) среднее число требований, которые находятся в системе ($N_{сист} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n$);
4) среднее число требований, которые находятся в очереди

$$N_{очер} = \sum_{n=N_k}^{\infty}(n - N_k)P_n \text{ , где}$$

N_k – число каналов обслуживания.

5) Среднее время ожидания в очереди $T_{очер}$. Для разомкнутой системы

$$T_{очер} = \frac{N_{очер}}{\lambda} \text{ , где}$$

λ - это интенсивность поступления требований в систему.

Для замкнутой системы:

$$T_{очер} = \frac{N_{очер}}{\lambda(m - N_{очер})} \text{ , где}$$

m – число требований, которые требуют обслуживания.

6) среднее время ожидания требований в системе $T_{сист}$;
7) среднее число свободных каналов обслуживания:

$$N_{BK} = \sum_{n=0}^{N_k - 1}(N_k - n)P_n;$$

8) среднее число занятых каналов обслуживания:

$$N_{ЗК} = \sum_{n=1}^{N_k} nP_n$$

Задачи анализа одноканальных систем массового обслуживания

Как видно из приведенной классификации систем массового обслуживания, есть большое количество разновидностей. Ограничимся системами массового обслуживания которые наиболее часто встречаются.

- детерминированные одноканальные
- одноканальные разомкнутые с простейшим потоком поступления требований к системе
- одноканальные замкнутые (поток требований Пуассоновський) – с ожиданием.

Все эти системы могут быть исследованы аналитическими методами, построенными на основе представления процесса формирование системы как марковського процесса с непрерывном временем и детерминированным состоянием.

Задача анализа детерминированной системы

Постановка задачи: пусть исследуется производственный процесс, в котором поступление требований происходит через равные промежутки времени.

Таким образом:

$$\Delta t_n = const$$

то есть интенсивность потока поступление требований λ, которая равняется $\lambda = \dfrac{1}{t_n}$ также является const, и обслуживание проводится через равные промежутки времени

$$\Delta t_{обсл} = const$$

(интенсивность обслуживания $\eta = \dfrac{1}{\Delta t_{обсл}}$ также является const)

Есть один канал обслуживания, и считается, что

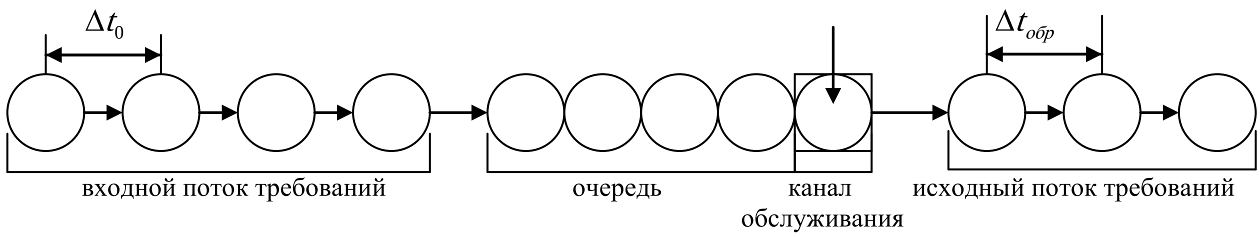
$$\frac{\Delta t_{обсл}}{\Delta t_{надх}} = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

(иначе очередь будет бесконечно возрастать)

Считаем также, что на начало обслуживания в системе уже находится n требований, и необходимо определить, через какое время очередь исчезнет:

$\psi = \dfrac{\lambda}{\mu}$ - называется коэффициентом использования.

Очередь будет бесконечно возрастать, если $\psi > 0$, если он равняется единице, то очередь будет иметь постоянную длину. Схематически работа рассматриваемой системы массового обслуживания представляется следующим образом:



Пока обслуживается очередь с n требований, на протяжении времени $T = n\Delta t_{обсл}$ снова поступает на обслуживание n_1 первых требований

$$n_1 = \frac{t}{\Delta t_n} = \frac{n * t_{обсл}}{\Delta t_n} = n\frac{\lambda}{\mu} < n\psi$$

Аналогично, пока будут обслуживаться n_1 требований на протяжении времени $T_1 = n_1\Delta t_{обсл}$ дополнительно поступят на обслуживание n_2 требований.

$$n_2 = \frac{t_1}{\Delta t_n} = \frac{n_1\Delta t_{об}}{\Delta t_n} = n\frac{\lambda}{\mu} = n_1\psi = n\psi^2$$

это происходит до тех пор, пока не будет выполняться равенство $\Delta t_k = \Delta t_n$, после чего очередь исчезнет.

Весь процесс функционирования системы массового обслуживания можно представить в аналитическом виде.

Время, через которое очередь исчезнет, можно даже представить в виде:

$$T = t + t_1 + \ldots + t_n = \sum^{k} t_i$$

Исследование математической модели

Для вычисления времени, через который очередь исчезнет, необходимо раскрыть математическую модель, а именно:

$$T = n_1\Delta t_{обсл} + n_2\Delta t_{обсл} + \ldots + n_k\Delta t_{обсл} = \Delta t_{обсл}(n_1 + n_2 + \ldots + n_k) = \frac{1}{\mu}(n_1 + n\psi + \ldots + n\psi^k) =$$

$$= \frac{n}{\mu}(1 + \psi + \psi^2 + \ldots + \psi^k) = \frac{n(1-\psi^{k+1})}{\mu(1-\psi)}$$

В модели использованная формула суммы геометрической прогрессии. Чем ближе интенсивность потока ψ к интенсивности обслуживания μ, тем через больший промежуток времени исчезнет очередь. Если величиной ψ^{k-1} можно пренебречь для упрощения, тогда можем записать, что

$$T \approx \frac{n}{\mu - \lambda}$$

Задача анализа разомкнутой системы с ожиданием (потоки требований Пуассоновские)

Постановка задачи:

Пусть данная некоторая система массового обслуживания, для которой справедливые следующие гипотезы:

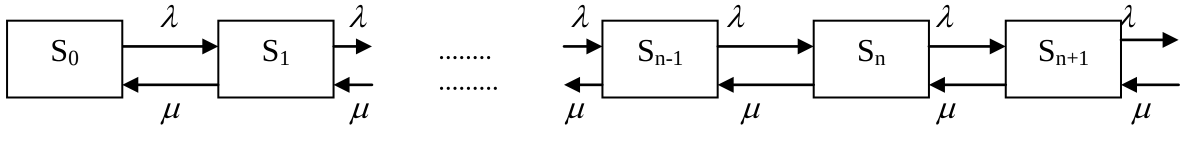
1) вероятность поступления требований не зависит от принятого начала отсчета времени, а зависит только от времени периода наблюдение (поток стационарный)
2) не поступают в систему и не оставляют ее одновременно 2 или больше требований (поток стационарный)
3) поступление одной требования не зависит от поступления другой (отсутствие последействия). Известные также интенсивность λ поступления потоков требований (среднее число обслуживание за единицу времени - $1/\Delta t_{обсл}$). Нужно определить основные характеристики системы, а именно:

- P – вероятность простоя канала обслуживания
- P_n - вероятность того, что в системе находятся n-требований
- $N_{сист}$ - среднее число требований, которые находятся в системе
- $N_{чер}$ - среднее число требований, которые находятся в очереди
- $T_{сист}$ - среднее время ожидания требований в системе.

Поток требований, который владеет качествами стационарности, ординарности и отсутствием последействия, называют простым. В нашей задаче поток требований простой. Основным понятием при анализе процесса системы массового обслуживания есть состояние системы. Зная состояние системы, можно предусмотреть в вероятносном смысле ее поведение. Простой поток – это стационарный Пуассоновський поток. Если все потоки событий, которые переводят систему из одного состояния к другому являются Пуассоновськими, то для этих системы вероятность состояния описывается с помощью систем обычных дифференционных уравнений. В большинства задач не прикладного характера замена непуассоновського потока событий Пуассоновським с теми же интенсивностями приводит к получению решения, которое мало отличаются от истинного, а иногда и совсем не отличается. В качестве критерия отличия реального стационарного потока от Пуассоновського можно рассматривать близость математического ожидания числа дисперсий событий, которые поступают на определенном участке времени в реальном потоке.

Существует определенный математический прием, который значительно облегчает вывод дифференционного уравнения для вероятностного состояния. Сначала строится размеченный граф состояний с указанием возможных переходов. Это облегчает исследование и делает его более наглядным. Граф состояний, на котором проставленные не только стрелки переходов, но и интенсивность соответствующих потоков событий называют размеченным.

Зачертим размеченный граф состояний одноканальной разомкнутой системы массового обслуживания с ожиданием:



Если составленный размеченный граф состояний, то для построения математической модели, то есть для составления системы обычных дифференционных уравнений рекомендуется использовать следующие правила:

производная $\frac{\lambda P_u(t)}{dt}$ вероятности пребывания системе в состоянии n равняется алгебраической сумме следующих величин: число величин этой суммы равняется числу стрелок на графе состояний системы, которая соединяет состояние n с другими состояниями. Если стрелка направленная в состояние n, то соответствующая величина берется с знаком “+” . Если стрелка направленная из состояния n – то с знаком “-“. Каждая величина суммы равняется произведению вероятностей того состояния, из которого направленная стрелка на интенсивность потока событий, которые переводят систему по данной стрелке.

В соответствии с размеченным графом состояний, используя данное состояние, запишем систему обычных дифференционных уравнений вероятностей состояний таким образом:

$$\frac{dP_0}{dt} = -P_0(t)\lambda + P_1(t)\mu \, ;$$

$$\frac{dP_n}{dt} = P_{n-1}(t)\lambda - (\lambda+\mu)P_n(t) + P_{n+1}(t)\mu$$

Исследование математической модели

Ограничимся исследованием режима работы, что установился замкнутой одноканальной системы. Тогда:

$$\frac{dP_0}{dt} = 0 \text{ (n=0,1,...)}$$

Действительно, вместо системы дифференционных уравнений получаем систему алгебраических уравнений:

$$-P_0\lambda + P_1 = 0$$

$$P_0\lambda - (\lambda+\mu)P_1 + P_2\mu = 0$$

$$P_{n-1}\lambda - (\lambda+\mu)P_n + P_{n-1}\mu = 0$$

Используя полученную систему алгебраических уравнений легко выразить вероятности состояния системы в виде квадратной рекурентной формулы . Из первого уравнения определяется вероятность присутствия одного требования в системе.

$$P_1 = P_0\frac{\lambda}{\mu} = \psi P_0$$

Из второго уравнения вероятность присутствия двух требований в системе:

$$P_2 = P_1\frac{(\lambda+\mu)}{\mu} - P_0\frac{\lambda}{\mu} = \psi P_1 + P_1 - \psi P_0 = \psi P_1$$

И в результате получаем:

$$P_2 \psi^2 P_0$$

Аналогично проводится преобразование для P_3

$$\mu P_3 - (\lambda-\mu)P_2 + \lambda P_1 = 0 \;\; P_3 = \frac{\lambda+\mu}{\mu}P_2 - \frac{\lambda}{\mu}P_1 = \psi P_2 + P_2 - \psi P_1 = \psi P_2$$

И наконец, суммируем полученные значения $P_0, P_1, ..., P_n$ и находим суму:

$$-\psi P_1 = \psi P_2$$

$$P_3 = \psi^3 P_3$$

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = P_0 + \ldots + P_i + \ldots + P_n = P_0 + \psi P_0 + \ldots + \psi^n P_0$$

Используя формулу геометрической прогрессии, получаем:

$$P(1-\psi+\ldots+\psi^n) = P_0\frac{(1-\psi^{n-1})}{(1-\psi)}$$

и при $n \to \infty \;\; (\psi < 0)$, сумма:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i = P_0\frac{1}{1-\psi} = 1$$

Откуда мы имеем:

1) вероятность простоя канала обслуживания:

$$P_0 = 1 - \psi_1$$

2) находим вероятность того, что в системе находится n требований:

$$P_n = \psi^n P_0 = \psi^n (1-\psi)$$

3) среднее число требований, которые находятся в системе:

$$N_{сист} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\psi^n (1-\psi) = (1-\psi)\sum_{n=1}^{\infty} n\psi^n = (1-\psi)(\psi + 2\psi^2 + 3\psi^3 + \ldots + n\psi^n + \ldots) =$$

$$= \psi(1-\psi)(1 + 2\psi + 3\psi^3 + .. + n\psi^{n-1} + \ldots)$$

Последняя скобка есть производной от следующего выражения:

$$\psi + \psi^2 + \ldots + \psi^n \ldots = \psi(1 + \psi + \ldots + \psi^{n-1} + \ldots) = \psi/(1-\psi) \qquad (\psi < 1),$$

то есть это выражение равняется:

$$1/(1-\psi)^2$$

В результате получаем:

$$N_{сист} = \psi(1-\psi)/(1-\psi)^2 = \psi/(1-\psi)$$

4) Дале находим среднее число требований, которые находятся в очереди:

$$N_{черг} = (\lambda/\mu) N_{сист} = \psi^2/(1-\psi)$$

5) Находим среднее время ожидания требования в системе, который возможно определить, зная среднее число требований, которые находятся в системе:

$$T_{сист} = N_{сист}/\lambda = (1/\mu)(1/(1-\psi))$$

Задача анализа замкнутой системы с ожиданием (потоки требований Пуассоновские)

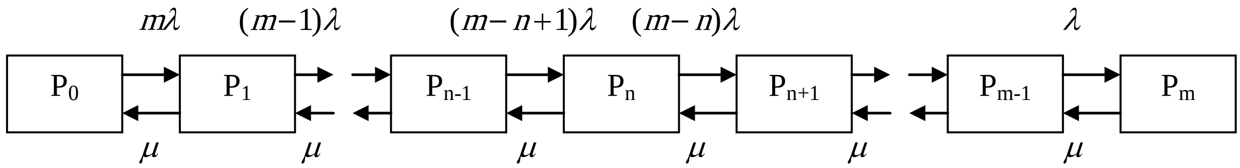
<u>Постановка задачи:</u>

Пусть исследуется некоторая система массового обслуживания с ограниченным количеством требований в системе, то есть требования, которые обслуживаются, снова возвращаются в систему обслуживания. Интенсивность поступления одного требования в систему известная и равняется λ. Интенсивность обслуживания также известная и равняется μ. Число требований, которые требуют обслуживания. равняется m. Необходимо определить основные характеристики системы, а именно – вероятность того, что в системе есть n требований - P_n. Вероятность простоя канала обслуживания - P_0 .Среднее число требований, которые находятся в очереди - $N_{черг}$. Среднее число требований, которые находятся в системе - $N_{сист}$. Среднее время ожидания в очереди - $T_{черг}$. Среднее время ожидания требования в системе - $T_{сист}$.

Состояние системы будем связывать с числом требований, которые находятся в системе. При этом возможные два состояния:

1) число требований, которые поступили в систему, равняется нулю $(n = 0)$,то есть каналы обслуживания простаивают.
2) число требований , которые поступили в систему $(0 = n \le m)$.

Зачеркнем размеченный граф состояний одноканальной замкнутой системы массового обслуживания с ожиданием:



Построение математической модели

В соответствии с размеченным графом состояний и используя правило Колмагорова, запишем систему дифференционных уравнений для вероятности состояния:

$$\frac{dP_0}{dt} = -m\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) ;$$

$$\frac{dP_n}{dt} = -\left[(m-n)\lambda + \mu\right]P_n(t) + (m-n+1)\lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t)$$

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = -\mu P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t)$$

Ограничимся исследованием установившегося режима работы системы. Тогда:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0 \ , \quad n = (0,1,\ldots,m)$$

и вместо системы обычных дифференционных уравнений мы получаем систему алгебраических уравнений:

$$m\lambda P_0 - \mu P_1 = 0$$
$$[(m-n)\lambda + \mu]P_n - (m-n+1)\lambda P_{n-1} - \mu P_{n+1} = 0$$

Для $0 \le n \le m$ нетрудно получить рекурентную формулу:

$$P_1 = \frac{m\lambda}{\mu}P_0 = m\psi P_0 \text{ ; при } n = 1$$

$$P_2 = \frac{1}{\mu}\left\{\left[(m-1)\lambda + \mu\right]P_1 - m\lambda P_0\right\} = \left[(m-1)\psi + 1\right]P_1 - m\psi P_0 = (m-1)\psi P_2 \text{ ; при } n = 2$$

$$P_3 = \frac{1}{\mu}\left\{\left[(m-2)\lambda\right]P_2 - \left((m-1)\psi P_1\right)\right\} = \left[(m-2)\psi + 1\right]P_2 - (m-1)\psi P_1 = (m-2)\psi P_2$$

....

$P_n = (m-n+1)\psi P_{n-1}$;

Вероятность того, что в системе находится n требований, будет равна:

$$P_n = (m-n+1)\psi(m-n+2)\psi\ldots(m-1)\psi m\psi P_0 = \frac{m!\psi^n}{(m-n)!}P_0$$

Используя равенство:

$$\sum_{n-0}^{m} P_n = \sum_{n=0}^{m}\frac{n!\psi^m}{(m-n)!}P_0 = 1$$

можно получить выражение для P_0.

Вероятность простоя канала обслуживания P_0 будет равняться:

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{m}\frac{m!\psi^n}{(m-n)!}\right]^{-1}$$

Среднее число требований, которые находятся в очереди, равняется:

$$N_{черг} = \sum_{n=2}^{m}(n-1)P_n = m!\sum_{n=2}^{m}\left(\frac{(n-1)\psi^n}{(n-m)!}P_0\right) = m - \frac{1+\psi}{\psi}(1-P_0)$$

Среднее время ожидания требования в очереди:

$$T_{черг} = \frac{\mu}{\mu(m - N_{черu})} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{m}{1-P_0} - \frac{1+\psi}{\psi}\right]$$

Среднее время ожидания требования в очереди:

$$T_{сист} = \frac{N_{сист}}{\lambda(m - N_{сист})} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{m}{1-P_0} - \frac{1}{\psi}\right].$$

Как можно заметить, определение основных характеристик одноканальных систем массового обслуживания требует большой вычислительной работы, в связи с чем все расчеты делаются на компьютере.

<u>Задача анализа многоканальной системы массового обслуживания .</u>
Задача анализа разомкнутой системы с ожиданием (потоки требований Пуассоновские)

<u>Постановка задачи:</u> пусть известные интенсивность λ поступления потока требований в систему, и интенсивность μ обслуживания этих требований. Число каналов обслуживания N_k, и необходимо определить вероятность того, что

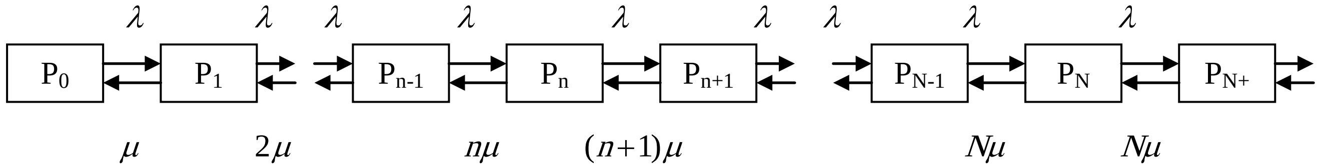
в системе находятся n требований $P_n(t)$, вероятность простоя каналов обслуживания $P_0(t)$, среднее число требований, которые находятся в очереди. Среднее время ожидания $T_{оч}$. Среднее число свободных каналов обслуживания.

В этой задаче возможные два случая:

1) в системе n изменяется $0 \le n < N$
2) число требований $n \ge N_k$ - числу каналов

В первом случае все требования, которые находятся в системе, одновременно обслуживаются, и не все каналы занятые. Общая интенсивность обслуживания: $\mu * n$

Зачеркнем размеченный граф состояний многоканальной разомкнутой системы массового обслуживания:



Построение математической модели

В соответствии с размеченным графом состояния и правилом Колмагорова запишем систему обычных дифференционных уравнений для состояния системы.

$$n = 0$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -P_0(t)\lambda + P_1(t)\mu$$

....

$$1 \le n < N$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = P_{n-1}(t)\lambda - (\lambda + n\mu)P_n + P_{n+1}(n+1)\mu = 0$$

....

$$n \ge N$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = P_{n-1}(t)\lambda - (\lambda + N\mu)P_n(t) + N\mu P_{n+1}(t) = 0$$

Ограничимся исследованием установившегося режима работы системы, если λ - const, μ - const

$$t \to \infty, \; P_n(t) \to const$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0 \quad (n = 0,1,\ldots)$$

и тогда вместо системы обычных дифференциальных уравнений получаем систему алгебраических уравнений:

$$n = 0$$

$$-\lambda P_0 + \mu P = 0$$

....

$$1 \le n < N$$

$$\lambda P_{n-1} - (\lambda + n\mu)P_n + P_{n+1}(n+1)\mu = 0$$

....

$$n \ge N$$

$$\lambda P_{n+1} - (\lambda + N\mu)P_n + P_{n+1}N\mu = 0$$

Используя полученные алгебраические уравнения, определим выражения для определения вероятности нахождение системы в состоянии n.

$n=0$

$P_1=\frac{1}{\mu}P_0=\psi P_0$

$n=1$

$P_2=\frac{1}{2\mu}\left[(\lambda+\mu)P_1-\lambda P_0\right]=\frac{1}{2}\left[(\psi+1)\psi P_0-\psi P_0\right]=\frac{\psi^2}{2}P_0$

....

$n=N-1$

$P_n=\frac{1}{N\mu}\left\{\left[\lambda(N-1)\mu\right]P_{n-1}-\lambda P_{N-2}\right\}=\frac{\psi^N}{N!}P_0$

Из этих выражений видно, что при $n<N$ вероятность нахождения в системе n требований определяется по следующей формуле:

$P_n{}'=\frac{\psi^n}{n!}P_0$

Для состояния $n>N$:

$n=N$

$P_{N+1}=\frac{1}{N\mu}\left[(\lambda+N\mu)P_n-\lambda P_{n-1}\right]=\frac{P_0}{N}\left[(\psi-N)\frac{\psi^N}{N!}-\frac{\psi}{(N-1)!}\right]=\frac{\psi}{N}*\frac{\psi^n}{N!}*P_0;$

....

$n=N+1$

$P_{n+2}=\frac{1}{N\mu}\left[(\lambda-N\mu)P_{N-1}-\lambda P_n\right]=\frac{P_0}{N}\left[(\psi+N)\frac{\psi}{N}*\frac{\psi^N}{N!}-\frac{\psi^{n-1}}{N!}\right]=\frac{\psi^2}{N^2}\frac{\psi^n}{N!}P_0$

Из полученных выражений видно, что для составления системы, при $n\geq N$ вероятность нахождения в системе n требований определяется по следующей формуле:

$$P_n=\frac{\psi^{n-N}\psi^N}{N^{n-N}N!}P_0=\frac{\psi}{N^{n-N}N}P_0$$

имея аналитическое выражение для всех состояний системы, а также используя очевидное равенство:

$$\sum_{n=9}^{\infty}P_n=\sum_{n=0}^{N-1}P_n{}'+\sum_{n=N}^{\infty}P_n{}'=1$$

Определим вероятность простоя канала обслуживания:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\psi}{n!}P_0+\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\psi^{k-N}\psi^N}{N^{n-N}N!}P_0=\frac{1}{1-\psi/N}$$

Вероятность простоя:

$$P_0=\left[\sum_{K=0}^{N=1}\frac{\psi^n}{n!}+\frac{\psi^n}{N!(1-\psi)/N}\right]$$

Среднее число требований, которые находятся в очереди, найдем по:

$$N_{черг}=\frac{\psi^N}{N!\,N(1-\psi/N)^2}P_0$$

Среднее время ожидания заявок в очереди:

$$T_{черг} = \frac{N_{черг}}{\lambda}$$

Среднее число занятых каналов :

$$N_{ск} = \sum_{n=0}^{N-1} (N-n)\frac{\psi^n}{n!} P_0$$

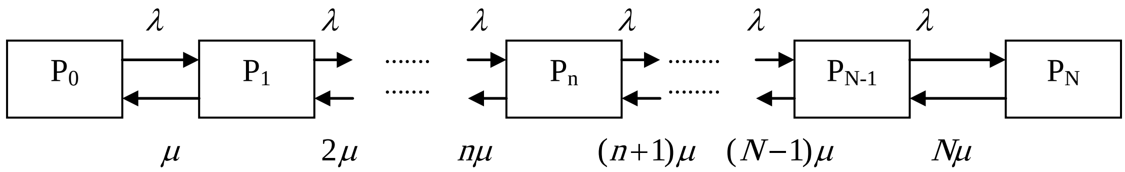
Задача анализа разомкнутой системы с отказом (потоки требований Пуассоновские)

Постановка задачи:

Пусть исследуется некоторая разомкнутая системы массового обслуживания, интенсивность поступления требований в систему известная и равняется λ. Интенсивность обслуживания каждого канала известная и равняется μ. Если требования застали все N каналов занятыми, то они получают отказ и оставляют систему. Эта задача впервые рассматривалась Ерлангом. Необходимо определить

1) вероятность P_0 того, что все каналы обслуживания свободные;
2) вероятность P_n того, что занят равно n каналов обслуживания
3) среднее число занятых каналов обслуживания

Зачеркнем разомкнутый граф состояний многоканальной разомкнутой системы массового обслуживания с отказом:



Состояние системы будем связывать с числом занятых каналов обслуживания. Пересчитаем основные возможности N состояний системы:

1) все каналы свободные. Ни одна требование не обслуживается
2) один канал занятый. Обслуживается одна заявка

....

n) n - каналов заняты. Обслуживается n требований

....

N) Все N каналов заняты, обслуживается N требований.

В соответствии с размеченным графом состояний, и используя правило Колмагорова, запишем систему обычных дифференционных уравнений для вероятности состояния системы:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

....

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) - n\mu P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

....

$$\frac{dP_N(t)}{dt} = -N\mu P_N(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

исследуя стационарный режим работы системы, при $t \to \infty$, система рекурентных алгебраических уравнений будет иметь вид:

$$-\lambda P_0 + \mu P_1 = 0$$

$$-(\lambda + \mu)P_1 + \lambda P_0 - 2\mu P_2 = 0$$

....

$$(\lambda + n\mu)P_n + \lambda P_{n-1} + (n\_1)\mu P_{n+1} = 0$$

....

$$-N\mu P_N + \lambda P_{N-1} = 0$$

Из первого уравнения

$$P_1 = P_0 \frac{\lambda}{\mu} = \psi P_0$$

Аналогично, из второго:

$$P_2 = P_1 \frac{\psi}{2} = P_0 \frac{\psi^2}{2}$$

$$P_n = P_0 \frac{\psi^n}{n!}$$

Используя полученные соотношения, возможно определить вероятность P_0 того, что все каналы обслуживания свободные.

$$\sum_{n=0}^{N} P_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{\psi^2}{n!} P_0 = P_0 \sum_{n=0}^{N} \frac{\psi^n}{n!} = 1$$

$$P_n = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{\psi^n}{n!}}$$

Вероятность того, что занято ровно n каналов обслуживания, будет равняться:

$$P_n \frac{\psi^n}{\left(n! \sum_{n=0}^{N} \frac{\psi^n}{n!} \right)}$$

среднее число занятых каналов обслуживания:

$$N_{зк} = \sum_{n=1}^{N} n P_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{\psi^n}{(n-1) \sum_{n=0}^{N} \frac{\psi^n}{n!}}$$

Задача анализа замкнутой системы с ожиданием (потоки требований Пуассоновские)

Постановка задачи:

Пусть исследуется некоторая система массового обслуживания, в которой требования, которые обслуживаются, снова возвращаются к системе обслуживания. Интенсивность одной требования - λ, интенсивность обслуживания каждого канала - μ, число каналов обслуживания - N. Число требований, которые требуют обслуживания - m. Будем считать, что $N \le m$.

Необходимо определить:

1) вероятность того, что в системе находятся n требований: $P_n(t)$
2) вероятность простоя каналов обслуживания $P_0(t)$
3) Среднее число требований, которые ожидают начала обслуживания, или длину очереди $N_{черг}$
4) Среднее время ожидания требования в очереди $T_{черг}$

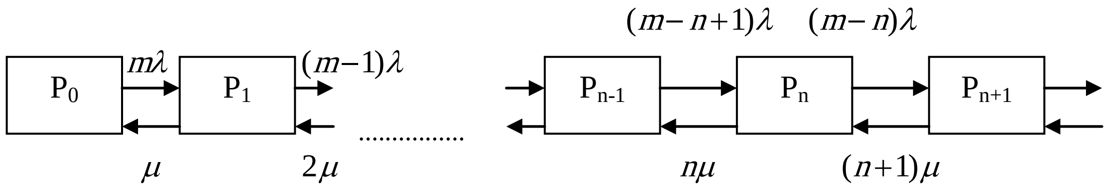
Состояние системы будем связывать с числом требований, которые находятся в системе. При этом возможные 2 случая:

1) Число требований n, которые поступили в систему, меньше числа каналов обслуживания, то есть $0 \le n < N$
2) Число требований n, которые поступили в систему, большее или равняется числу каналов обслуживания $n \ge N$

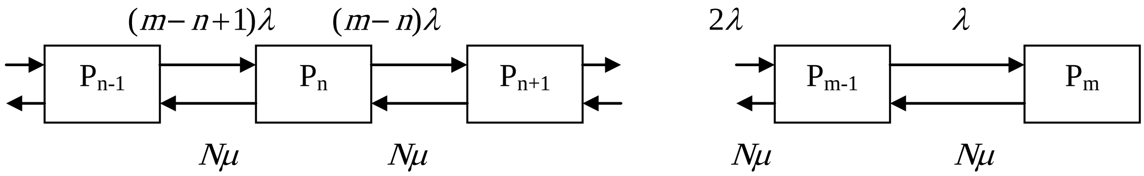
Из них N обслуживается, а r требований ожидают в очереди. $r = (1,2...,m - N)$

Зачертим граф состояний многоканальной замкнутой системы массового обслуживания с ожиданием

$0 \le n \le N$:



$N \le n \le m$



В соответствии с размеченным графом состояний системы, и используя правило Колмагорова, запишем дифференциальные уравнения для вероятности состояний системы:

$0 \le n < N$

$$\frac{dP_0}{dt} = -m\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

....

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\left[(m-n)\lambda + n\mu\right]P_{n-1}(t) + (m-n+1)\lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t)$$

$N \le n < m$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\left[(m-n)\lambda + N\mu\right]P_n(t) + (m-n+1)\lambda P_{n-1} + N\mu P_{n+1}(t)$$

....

$$\frac{dP_N}{dt} = -N\mu P_N(t) + \lambda P_{N-1}(t)$$

Исследование математической модели

Для установившегося режима работы системы. что установился, если λ - постоянная величина, $\mu - const$, $t \to \infty$, $P_0 - const$, тогда

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = 0$$

и вместо системы обычных дифференционных уравнений получаем систему рекурентных алгебраических уравнений, из которых находятся:

1) Вероятность того, что в системе находится n требований для случая, если n изменяется от 0 к N, тогда:

$$P_n' = \frac{m!\psi^n}{n!(m-n)!}P_0$$

Для случая, если $N \le n \le m$:

$$P_n' = \frac{m!\psi^n}{N^{m-N}(m-n)!\,N!}P_0$$

Для вычисления вероятности простоя канала обслуживания используется следующее равенство:

$$\sum_{n=0}^{m} P_n = \sum_{n=0}^{N-1} P_n + \sum_{n=N}^{m} P_n = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{m!\psi^n}{n!(m-n)!} P_0 + \sum_{n=N}^{m} \frac{m!\psi^n}{n!(m-n)!\,N!} P_0 = 1$$

Из этой формулы мы находим P_0:

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{N-1} \frac{m!\psi^n}{n!(m-n)} + \sum_{n=N}^{m} \frac{n!\psi^n}{N^{(m-n)}(m-n)!\,N!} \right]$$

Дале находим среднее число требований, которые ожидают начала обслуживания (длина очереди):

$$N_{черг} = \sum_{n=N}^{m} (n-N) P_n^{\,n} = \sum_{n=N}^{m} \frac{n!\,P^n (n-N)}{N^{(n-N)} (m-n)!\,N!} P_0$$

Дале находим среднее время ожидания требования в очереди:

$$T_{черг} = \frac{N_{черг}}{\mu(N-N_{вк})}$$

Среднее число свободных каналов обслуживания:

$$N_{вк} = \sum_{n=0}^{N-1} (N-n) P_n' = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(N-n)m!\,P^n}{n!(m-n)!} P_0$$

Задача синтеза (оптимизации) одноканальной замкнутой системы массового обслуживания с ожиданием.

Пусть исследуется одноканальная система массового обслуживания. для которой известные характеристики канала обслуживания и характеристики требований, которые поступают на обслуживание. необходимо определить оптимальную структуру системы, то есть оптимальное число требований $(m_{опт})$, необходимых для обслуживания канала, чтобы эффективность системы была максимальной. В качестве критерия оптимизации примем удельные приведенные затраты, которые характеризуют затраты всей системы на одно обслуживание. Аналитически выражение критерия оптимизации для определения оптимальной структуры одноканальной замкнутой системы массового обслуживания с ожиданием запишется следующим образом:

$$y = \frac{P_0 C_{пк} + (1-P_0) C_{рк} + \ldots + m C_{ув}}{\mu(1-P_0)} + \frac{E_н (S_к + m S_т)}{T_P (1-P_0)} \qquad \left[гр./_{од.продукции} \right]$$

где P_0 - вероятность простоя канала обслуживания

m - число требований, которые требуют обслуживания

$C_{пк}$ - средние затраты при простое канала обслуживания в продолжение часа из-за несвоевременного поступления требования на обслуживание

$C_{рк}$ - средние затраты при работе канала обслуживания в продолжение часа

μ - интенсивность канала обслуживания

$C_{ув}$ - средние затраты удержания требования в продолжение часа

S_k и $S_т$ - капитальные вложения соответственно на канал обслуживания

T_P - годовой режим работы , то есть число часов работы в год

$E_н$ - нормативный коэффициент нормирования.

При определенные оптимальной структуры системы массового обслуживания, можно предположить:

Вероятность поступления определенного количества требований в систему зависит от длины периода поступления, а не от расположения этого периода, так как поток поступления требований на обслуживание - стационарный, а именно: число требований, которые поступили в систему в некоторый момент времени, не зависит от числа, которое поступило до того. Вероятность поступления двух или большее требований в один момент времени настолько маленькая, что ею можно пренебречь, а значит поток требований можно считать ординарным. Используя раньше полученные зависимости, получаем: $P_n = \frac{m!\psi^n}{(m-n)!}P_0$, где $\psi = \lambda/\mu$

величина ψ называется коэффициентом использования, где λ - интенсивность поступления, μ - интенсивность обслуживания

- вероятность простоя канала обслуживания:

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{m!\psi^n}{(m-n)!}\right]^{-1}$$

Построение математической модели

Аналитическое выражение целевой функции с учетом результатов, полученных выше, запишется в следующем виде:

$$y = \frac{C_{рк} - C_{пк}}{\mu} + \left[C_п + mC_{ув} + \frac{E_н}{T_P}(S_k + S_T m)\right] * \frac{1}{\mu\left[1 - \left[1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{m!\psi^n}{(m-n)!}\right]\right]^{-1}}$$

Таким образом при известных условиях работы системы необходимо определить оптимальную структуру системы. то есть такое количество требований m, которые минимизируют величину критерия оптимизации.

Исследование математической модели

Запишем критерий оптимизации в виде (обозначив первое слагаемое через yи превратив второе слагаемое):

$$y(m) = y_1 + \frac{C_{пк} + S_k E_н/T_P + m(C_{ув} + S_T E_H/T_P)}{\mu[1 - P_0(m)]}$$

Как можно видеть, первое слагаемое не зависит от m. Для определения минимального значения целевой функции предположим, что оно достигается для m- мин. Тогда:

$$y(m_{опт} - 1) > y(m_{опт})$$
$$y(m_{опт} + 1) > y(m_{опт})$$

Найдем соответствующие значения для $y(m-1)$ и $y(m+1)$:

$$y(m-1) = y_1 + \frac{C_{пк} + S_K E_H/T_P + (m-1)(C_{ув} + S_T E_H/T_P)}{\mu[1 - P_0(m-1)]}$$

$$y(m+1) = y_1 + \frac{C_{ПК} - S_K E_н/T_P + (m+1)(C_{ув} + S_T E_K/T_P)}{\mu[1 - P(m+1)]}$$

Теперь находим:

$$y(m-1) - y(m) = \frac{C_{пк} + S_K E_H/T_P + (m-1)(C_{ув} + S_T E_H/T_P)}{\mu[1 - P_0(m-1)]} - \frac{C_{пк} + S_K E_H/T_P + m(C_{ув} + S_T E_н/T_P)}{\mu[(1 - P_0(m)]} = 0$$

Аналогично определяется:

$$y(m+1) - y(m) = \frac{C_{пк} + S_K E_H/T_P}{\mu[1 - P_0(m+1)]} - \frac{C_{пк} + S_K E_H/T_P + m(C_{ув} + S_T E_н/T_P)}{\mu} * \left[\frac{1}{1 - P_0(m+1)} - \frac{1}{1 - P_0(m)}\right] \geq 0$$

В итоге получаем неравенство, используя которое можно легко определить оптимальную структуру одноканальной замкнутой системы, зная соответствующую входную информацию. Значение n, которое удовлетворяет неравенству, обеспечивает минимальное значение критерия оптимизации целевой функции. Чтобы определить оптимальное значение m достаточно про табулировать значение следующего неравенства:

$$\frac{1}{1-P_0(m-1)}\left(1-\frac{1}{c+m}\right) > \frac{1}{1-P_0(m)} < \left(1+\frac{1}{c+m}\right) * \frac{1}{1-P_0(m+1)}$$

где $C = \left(C_{пк} + \frac{E_н}{T_P} S_K\right) / \left(C_{ув} + \frac{E_H}{T_P} S_T\right)$

Задача синтеза(оптимизации) многоканальной замкнутой системы массового обслуживания с ожиданием.

Постановка задачи и выбор критерия оптимизации

Пусть исследуется некоторая многоканальная замкнутая система массового обслуживания. Известные характеристики каналов обслуживания и характеристики требований, которые поступают на обслуживание. необходимо определить такую структуру многоканальной системы. чтобы эффективность системы была максимальной. В качестве критерия оптимизации принимаем целевую функцию , то есть удельные приведенные затраты, то есть затраты, которые приходятся на одно обслуживание. Будем использовать обозначения и допущения те же, что и для одноканальной замкнутой системы. Аналитическое выражение критерия оптимизации для определения оптимальной структуры многоканальной замкнутой системы массового обслуживания будет выглядеть следующим образом:

$$y = \frac{P_0 C_{пк} N + (1-P_0) C_{рк} N + N - C_{ув}}{\mu(1-P_0)} + \frac{E_H (S_K N + m S_T)}{T_P \mu (1-P_0)}$$

N - число каналов обслуживания в системе.

Используя раньше полученные зависимости представляем исходное аналитическое представление в следующем виде:

1) вероятность того, что в системе на обслуживании находится n требований:

$$0 \le n \le N$$

$$P_n = \frac{m! \psi^n P_0}{n!(m-n)!}$$

$$N \le n \le m$$

$$P_n = \frac{m! \psi^n P_0}{N^{(n-N)}!(m-n)!\,N!} \qquad \sum_{n=0}^{m} P_n = 1$$

вероятность простоя из-за отсутствия требований в системе:

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{m! \psi^n}{n!(m-n)!} + \sum_{n=N}^{m} \frac{m! \psi^n}{N^{(n-N)}(m-n)!\,N!}\right]^{-1}$$

Построение математической модели

Запишем аналитическое выражение угловой функции с учетом полученных результатов:

$$y = \frac{C_{рк} N - C_{пк} N}{\mu} + \frac{C_{пк} N + m C_{ув} + (E_H / T_P) S_k N + (E_H / T_P) S_T m}{\mu\left[1 - (1 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{m! \psi^n}{n!(m-n)} + \sum_{n=N}^{m} \frac{m! \psi^n}{N^{(n-N)}(m-n)!\,N!})^{-1}\right]}$$

Таким образом имея развернутое выражение целевой функции при известных условиях работы системы можно определить оптимальную структуру многоканальной системы. то есть оптимальное количество требований, которые функционируют в системе.

Исследование математической модели

Для исследования минимума целевой функции запишем следующую систему неравенств:

$$y(m_{опт}-1) > y(m_{опт})$$
$$y(m_{опт}+1) > y(m_{опт})$$

Как можно заметить, первое слагаемое целевой функции не зависит от числа требований m, и учитывая это, запишем целевую функцию в виде:

$$y(m) = y_1 + \frac{(C_{пк} + S_K\, E_H / T_P)\, N + m(C_{ув} + S_T\, E_H / T_P)}{\mu\left[1 - P_0(m)\right]}$$

Для определения оптимального числа требований найдем составляющие значения:

$$y(m-1) = y_1 + \frac{(C_{пк} + S_K\, E_H / T_P)\, N + (m-1)(C_{ув} + S_T\, E_H / T_P)}{\mu\left[1 - P_0(m-1)\right]}$$

$$y(m+1) = y_1 + \frac{(C_{пк} - S_K\, E_н / T_P)\, N + (m+1)(C_{ув} + S_T\, E_K / T_P)}{\mu\left[1 - P(m+1)\right]}$$

Обозначив отношение затрат работы канала требований через C

$$C = \frac{C_{пк} + E_H\, S_K / T_P}{C_{пк} + E_H\, S_T / T_P}$$

и проведя некоторые преобразования, наконец получаем:

$$\frac{1}{1 - P_0(m-1)}\left(1 - \frac{1}{CN + m}\right) > \frac{1}{1 - P(m)} < \left(1 - \frac{1}{CM + m}\right)\frac{1}{1 - P(m+1)}$$

Математическое моделирование эмпирико-статистическим методом

Такое моделирование применяется в тех случаях, если априорной информации об объекте недостаточно. При построении математической модели на основе этого подхода различают активные и пассивные эксперименты. Пассивный эксперимент – это когда ставится большая серия опытов с поочередным колебанием каждой искомой переменной. Сюда же относят и сбор информации в режиме нормального функционирования. Обработка результатов проводится методами регрессионного и корреляционного анализа.

Активный эксперимент ведется по заранее составленному плану. Это разрешает существенно уменьшить количество опытов, и установить зависимости между переменными и условиями оптимума. Как в пассивном, так и в активном экспериментах математические модели описываются некоторыми функциями отклика:

$$y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

В данной записи x_k будем называть факторами. Геометрически это некоторая поверхность отклика. При использовании статистических методов функцию отклика обычно отображают полиномиальным представлением (например, рядом Тейлора)

$$y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j + \sum_{\substack{e,i=1 \\ e \neq i}} \beta_{ei} x_e x_i + \ldots$$

$$\beta_{\gamma j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^{\,2}} \qquad \beta_{ej} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_e \partial x_j}$$

В реальном эксперименте рядом с управляемыми факторами x_j всегда присутствуют неконтролируемые, отсюда функция отклика носит случайный характер. Поэтому при обработке экспериментальных данных вместо теоретических β коэффициентов получают их оценки, которые называются выборочными коэффициентами регрессии, а само уравнение - уравнением регрессии.

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^{k} \hat{\beta}_j x_j + \sum_{j,e=i}^{K} \hat{\beta}_e x_e x_j + \ldots$$

Коэффициенты регрессии обычно определяются на основе метода наименьших квадратов из условия минимума функционала:

$$m\Phi = \left\| \bar{y} - \hat{y} \right\|^2 = \sum_{j=1}^{N} (\bar{y}_j - \hat{y}_j)^2$$

где N - объем выборки из всего объема значений исследуемого параметра.

Введем степень свободы $f = N - l$, где l - число связей, которые наложенные на выборку. Вид уравнения регрессии выбирается путем экспериментального подбора данных. Зачертим таблицу определения коэффициентов уравнения регрессии.

Число факторов	Степень уравнения регрессии			
	1	2	3	4
2	3	6	10	15
3	4	10	20	35
4	5	15	35	70
5	6	21	56	126

Метод наименьших квадратов предусматривает вычисление параметров для широкого круга функций, которые линейно зависят от этих параметров.

$$y = a_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots$$

где $v_i : x_1^{\,2}, \lg x, \sin x, \ldots$ - произвольная функция

Выборка в качестве оценок искомых параметров a_i предусматривает минимум следующего функционала:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} (y_{розр} - y_{iфакт}) = \sum_{ш=1}^{N} \left[(a_0 + a_1 v_1 + \ldots) - y_{iфакт} \right]^2 \Rightarrow \min$$

Здесь v_i и $y_{iфакт}$ - переменные, над которыми ведется наблюдение, a_i - искомые неизвестные параметры функций.

Методы регрессионного и корреляционного анализа

Содержание метода в том, что он обеспечивает такую подгонку, при которой экспериментальные точки наилучшим образом накладываются на регрессионную кривую.

Корреляция – это понятия, которое показывает, насколько хорошо выбранная кривая и соответствующие ей уравнения в действительности согласовываются с экспериментальными данными. Корреляционный анализ показывает степень соответствия данной гипотезы к принятой гипотезе. Первая задача в этом методе состоит в установлении формы корреляционных связей, то есть видов уравнений регрессии.

Вторая задача состоит в оценке тесноты или силы корреляционной связи, который оценивается по величине рассеяния функции связи вокруг средних значений. Для решения первой задачи проводится сбор данных, после чего определяются входные и выходные величины $(x_1,..., x_n; y_1,..., y_n)$

Метод регрессионного анализа

Статистической называется зависимость, при которой изменение одной из величин приводит к изменению другой. Иногда такую зависимость называют корреляционной. Условным средним значением называют среднее арифметическое значение некоторой случайной величины y, и соответствующее ей другое случайное значение x. Если каждому значению x соответствует значение y_z, то можно говорить, что случайная величина y корреляционно зависит от величины x и существует функциональная зависимость $\overline{y}_x = f(x)$ (1), то есть корреляционной зависимостью y от x называется функциональная зависимость (1).

Уравнение вида

$$y_0 = a_0 + a_1 v_1 + ...$$

называется уравнением регрессии. Для проведения регрессионного анализа необходимое выполнение следующих условий:

1) Входной параметр x вычисляется с довольно малой ошибкой. Ошибка функции отклика объясняется неучетом ряда переменных, которые не вошли в уравнения регрессии.
2) Результат наблюдения над входными величинами $y_1 ... y_n$ являются независимыми нормальнораспределенными величинами.
3) При проведении опыта с объемом выборки M, при условии, что каждый опыт проводится параллельно m раз, выборочные дисперсии $S_1^{\ 2},..., S_n^{\ 2}$ должны быть однородными.
   - Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения, параметры известного распределения.
   - Нулевой (основной) называют предположенную гипотезу и обозначают H_0 .
   - Конкурирующей гипотезой H_1 называют гипотезу что противоречит гипотезе H_0 .
   - Так как выдвинутая гипотеза может быть верной или ошибочной, возникает необходимость ее проверки. При этом возникает ошибка 1-ого рода (если полностью отброшенная верная гипотеза)

Оценка однородности дисперсии

Определение однородности дисперсии сводится к определению средних значений из результатов параллельных опытов:

1) $$\overline{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{m}(y_{ij} - \overline{y}_i)^2}{m-1} \quad i = 1...n$$
2) Определяется выборочная дисперсия для каждого опыта:

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{m}(y_{ij} - \overline{y}_i)^2}{m-1} \qquad i = 1...n$$

3) Проводится проверка однородности дисперсии по критерию Кохрена, для этого нам необходимо найти величину G:

$$G = \frac{S_{i\ \max}^2}{\sum_{i=1}^{N} S_i^2}$$

С этими критериями связанные число степеней вольности N и $m-1$. По ним уровень значимости $p = 0,05$. Из таблиц Кохрена берем соответствующие значения. Тогда гипотеза об однородности дисперсий не откидывается, если G будет меньше табулированого значения и уровня значимости:

$$G < G_p(N, m-1)$$

Основные положения классического регрессионного анализа

Регрессионные модели с успехом используются на практике. Обычно под истинным значением понимают условное мат. ожидание зависимой переменной при заданных значениях факторов:

$$\eta(x_1, x_2, \dots x_n) = E\{y/x_1, x_2, \dots x_n\} \quad (1.1)$$

E - знак мат. ожидания.

Равенство (1.1) называют регрессией, или уравнением регрессии, и показывает изменение среднего значения отклика объекта при изменении факторов. Фактически выходная характеристика имеет следующий вид:

$$y(x_1, x_2 \dots x_n) = \eta(x_1, x_2 \dots x_n) + \varepsilon$$

ε - случайное возмущение. Чаще всего принимают, что действия на объект множества случайных возмущений эквивалентно действию одного единственного случайного возмущения ε с нормальным распределением, нулевым мат. ожиданием и дисперсией δ^2. Это предположение выполняется достаточно хорошо для многих практических задач, в которых все случайные возмущения оказывают воздействие , соизмеримое одно с другим. Основанием этому служит центральная предельная теорема теории вероятности. Стандартная процедура регрессионного анализа получила широкое практическое применение, поскольку она справедлива при некоторых достаточно часто выполняемых предположениях. Прежде всего ограничимся рассматриванием модели классом линейных, т.е. таких, что выходная характеристика представима в следующем виде:

$$y_u = \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_{iu} + \varepsilon_u \quad (1.2)$$

$u = 1,2,\dots N$, где N - номер наблюдения , упорядоченных данным образом (табл. 1.)

табл. 1.

N	X_1	X_2	…	X_u	…	X_m	Y
1	X_{11}	X_{21}	…	X_{u1}	…	X_{m1}	Y_1
2	X_{12}	X_{22}	…	X_{u2}	…	X_{m2}	Y_2
…	…	…	…	…	…	…	…
U	X_{1u}	X_{2u}	…	X_{uu}	…	X_{mu}	Y_{uu}
…	…	…	…	…	…	…	…
N	X_{1N}	X_{2N}	…	X_{uN}	…	X_{mN}	Y_N

В принципе в табл. 1 можно рассмотреть и более одного отклика. Поскольку для каждого отклика вид модели идентичен, мы будем рассматривать данные наблюдения только для одного отклика.

В классическом регрессионном анализе делают следующие основные предположения:

1) Величина ε_u $u = 1,2,\dots N$ есть случайная величина а в силу этого воздействия y_u также случайная величина с распределением того же вида, что и ε_u, что непосредственно вытекает из равенства

$$y_u = \eta_u + \varepsilon_u \text{, где}$$

η_u - неслучайная величина.

2) Случайная величина ε имеет нулевое мат. ожидание $E(\varepsilon_u = 0)$, $u = 1,2,\dots N$. Это означает, что среднее отклонение от константы ε_u равны нулю , что легко выполнимо. По этому данному условию можно подчинить все реальные наблюдения.

$$E\{\varepsilon_u\} = \gamma_u \neq 0$$

тогда мы можем записать, что

$$E\{y_u\} = E\{\eta_u\} + E\{\varepsilon_u\} = \eta_u + \gamma_u = \eta_u'$$

значения наблюдения y_u можно записать так:

$$y_u = \eta_u' + \varepsilon_u', \text{ где } E\{\varepsilon_u'\} = 0$$

и вместо случайного возмущения ε используются ε', для которого положение 2 выполняется. Замена η_u на η_u' означает, что к истинному значению отклика прибавляется константа γ_u, которая высчитывается из среднего значения случайного возмущения. Поскольку γ_u постоянна при любых повторных u-тых опытах, она действует на отклик y_u одинаково.

3) Значение случайной величины ε_u, где $u = 1,2,...N$не корелированы, и имеют одинаковые дисперсии δ^2, т.е. ковариация $\operatorname{cov}\{\varepsilon_u, \varepsilon_i\} = 0$, при $u \neq i,\ u = 1,2...N$

   $\delta^2(\varepsilon_u) = \delta^2$, при $u - 1,2,...N$, и если учитывать, что $y_u = \eta_u + \varepsilon_u$, где η_u - const, нетрудно видеть, что это условие выполняется и для отклика.

   Условие (1.1) часто называют условием однородности наблюдений, и если же оно не выполняется, то мы говорим, что наблюдения не однородны. Однородность наблюдений означает, что интенсивность случайных возмущений не изменяется ни при изменениях факторов, ни во времени в течении которого делаются наблюдения. Данные условия выполняются очень часто, поэтому обычно и условия проведения эксперимента, и его точность остаются неизменными при различных значениях факторов. Однако встречаются и такие случаи, когда наблюдения не однородно. Иногда это можно установить из содержательных соображений, если известно, что что дисперсия случайного возмущения некоторым образам связана с математическим ожиданием отклика. Неоднородные наблюдения возникают и при нормальном распределении. В классическом регрессионном анализе предположение (3) должно выполнятся.

4) Случайная величина ε_u имеет нормальное распределение. Это предположение выполняется очень часто. причина заключается в том. Что согласно центральной предельной теореме влияние множества случайных величин с примерно одинаковыми дисперсиями эквивалентно влиянию единственной случайной величины с нормальным законом распределения. На практике мы нередко сталкиваемся именно с таким условием. На исследуемый объект влияет множество случайных возмущений с относительно слабым возмущением. Их совокупное действие гораздо сильнее и соответствуют действию одной нормальной величины с нормальным распределением. Хотя нормальное распределение широко распространено, случаи, когда фактическое распределение отличное от нормального, не так уж редки. Для формулировки дальнейших предположений воспользуемся матрицей N на K

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} & \dots & f_{k1} \\ f_{12} & f_{22} & \dots & f_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{1N} & f_{2N} & \dots & f_{kN} \end{pmatrix}$$

Назовём матрицу F матрицей регрессоров. При планировании экспериментов она ещё будет называться расширенной матрицей плана экспериментов.

5) Матрица F не случайна. Это означает, что её элементы – это известные числа, точно заданные исследователем. Предположение нарушается когда факторы $x_1, x_2, ...x_m$ устанавливаются на заданные уровни, или измеряются с ошибками. Если ошибки случайные, то числа, записанные для факторов в таблице (1.1) – это просто один из множества возможных случайных наборов. Если же рассматривать эти числа как неслучайные, полученные выводы будут относиться только к к заданным значениям

факторов. Однако для исследователя гораздо интересней получить оценки коэффициентов регрессии и оценки их статистических свойств, при некоторых усреднённых характеристиках ошибок, т.е. при заданном распределении ошибок измерения или ошибок в задании уровней факторов. Нарушение предположения (5) происходит в случае, когда исследователь хочет распространить выводы на более широкий класс значения факторов $x_1, x_2 ... x_m$, чем позволяют его данные.

6) Назначение на значение параметров β_i, где $i = \overline{1,k}$ в модели (1.2) не налагается никаких ограничений, т.е. предварительно об их значениях ничего не известно , и при вычислении они могут получиться какими угодно . В некоторых случаях есть априорная информация о значениях параметра β_i, которую эффективно можно использовать для улучшения оценок. Иногда из соображений, связанных с сущностью рассматриваемого явления вытекают некоторые соотношения между коэффициентами β , налагающие известные ограничения на их возможные значения.
7) Ранг матрицы F равен числу коэффициентов модели

$$(rang)F = k$$

Напомним, что рангом матрицы называется наивысший порядок отличного от нуля минора. Предположение 7 необходимо для реализации процедуры вычисления коэффициентов модели. Заранее ясно, что оно нарушено, если число опытов меньше чем число коэффициентов :

$$N < k$$

Классическим регрессионным анализом будем называть процедуру взвешивания регрессионных коэффициентов и статистический анализ модели , когда выполняются все семь предположений.

Метод наименьших квадратов

Поскольку результаты наблюдения есть случайные величины, то получить истинные значения коэффициентов $\beta_{1,}\beta_2,...,\beta_k$ из модели (1.2) нельзя. Вместо этого на основании данных таблицы 1.1 можно получить их оценки $b_1, b_2, ... b_k$, и если речь идёт о (1.2), то оно примет следующий вид

$$\hat{y}_u = \sum_{i=1}^{n} f_i f_{iu} \quad (1.8)$$

величину y называют предсказанным значением отклика. В регрессионном анализе для получения оценок коэффициентов модели (1.2) используют метод наименьших квадратов. Из-за действия случайных возмущений предсказанное значение $\hat{y}_u$ будет отличаться от результатов измерения $\hat{y}$. Разности $\hat{e} = y_u - \hat{y}_u$, $u = 1,2,...u$ называются остатками. Т.к. истинное значение векторов коэффициентов β , и его оценка b различны, то можно записать, что

$$y = \eta + \varepsilon = F\beta + \varepsilon$$

$\hat{y} = Fb$

А отсюда вектор остатков будет равен

$$e = y - \hat{y} = F(\beta - b) + \varepsilon$$

Оценки коэффициентов регрессии естественно искать так. Чтобы обеспечить наименьшие возможные остатки, но остатки многочисленные. Поэтому нужна некоторая суммарная характеристика, которая должна зависеть от различий между измеренными и предсказанными значениями выходных характеристик в каждом опыте. Такую функцию обычно называют функцией потерь, или функцией риска. Для разных целей и условий исследования она может иметь различный вид. Запишем наиболее часто используемую функцию потерь:

$$Q = \sum_{u=1}^{N} (y_u - \hat{y}_u)^2 \quad (1.4)$$

В этой функции остатки возведены в квадрат , чтобы компенсировать отличия в знаках.

Запишем сумму (1.4.)в векторной форме. Для этого пусть y

$$y = (y_1, y_2, ..., y_N)^T$$

обозначает N-мерный вектор соответствующих им предсказанных значений. И пусть e:

$$e = (e_1, e_2, ... e_N)^T$$

это будет вектор-столбец остатков. Как известно, скалярное произведение вектора на самого себя, равно сумме квадратов его элементов. Поэтому выражение (1.4) можно записать в виде:

$$Q = e^T e = (y - \hat{y})^T (y - \hat{y}) \quad (1.5)$$

Метод, позволяющий оценивать регрессионные элементы, выбирают так, чтобы минимизировать величину Q. Его называют обычно методом наименьших квадратов (МНК).

Оценивание коэффициентов регрессии с помощью МНК

Пусть на основании данных таблицы (1.1) нужно найти такие оценки коэффициентов регрессии, которые минимизируют сумму Q, определённую в формуле (1.4) в силу предложения (6) на возможные значения оценок не наложены никакие ограничения. Поэтому минимум получен, пприровняв к нулю производные, по неизвестным оценкам $b_1, b_2 ... b_u$. Подставим в формулу (1.3) и (1.4), тогда получим:

$$Q = \sum_{u=1}^{N} (q_u - b_1 f_{1u} - b_2 f_{2u} - ... - b_u f_{uu})^2$$

После дифференцирования этого выражения по искомым оценкам и приравнивания к нулю первых производных получаем систему уравнений. Полученная система линейна относительно оценок $b_1, b_2 ... b_k$, а число уравнений в ней равно числу неизвестных коэффициентов K модели. Она называется системой нормальных уравнений. Упростим эту систему, если положим, что

$$q_{ii} = \sum_{u=1}^{N} f_{iu}^2 ,$$

$$q_{ij} = \sum_{u=1}^{N} f_{iu} f_{ju} ,$$

$$Z_i = \sum_{u=1}^{N} f_{iu} y_u$$

Очевидно, что $q_{ij} = q_{ji}$, поскольку порядок перемножения под знаком суммы не важен. В дальнейшем мы воспользуемся матричной записью. Обозначим матрицу величиной $(k * k)$ буквой $G_i (k * k)$ - вектор оценок искомых коэффициентов, и запишем:

$$G_i = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{ki} & g_{k2} & \cdots & g_{kk} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_k \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_k \end{pmatrix}$$

Важно заметить, что матрица G является симметричной, тогда мы можем дать запись нормальных элементов $G \ b = z$, где матрица G называется информационной матрицей. Её можно представить через введённую матрицу регрессоров F, и записать следующим образом:

$$G = F^T F .$$

Это утверждение проверяется непосредственно транспонированием F матрицы и перемножением этих двух матриц, точно так же проверяется, что $Z = F^T y$, а следовательно систему нормальных уравнений можно переписать следующим образом:

$$F^T F b = F^T y \ (1.6)$$

Это чаще всего встречаемая форма записи системы. Отсюда можно найти в :

$$b = (F^T F)^{-1} F^T y \ (1.7)$$

Матрица $C = (F^T F)^{-1}$ - называется матрицей дисперсий ковариаций, или матрицей ошибок, т.е. чаще всего называют ковариационной матрицей, или матрицей ошибок.

Методы построения случайных величин

Идея метода статистических исследований заключается в том, что вместо того, чтобы описывать случайные явления с помощью аналитических зависимостей, используются розыгрыши. Т.е. моделирование случайных явлений с помощью некоторой процедуры, дающей случайные результаты. Произведя множество таких розыгрышей, образуем множество реализаций случайного явления, которые обрабатываются методами математической статистики. Способы формирования случайных величин бывают следующими:

1) Выработка случайных чисел с помощью специальных приставок, связанных с машиной.
2) Выработка случайных чисел самой машиной по стандартным случайным алгоритмам.

Псевдослучайные числа – это числа, полученные рекуррентным способом по специальному алгоритму.

Требования , предъявляемые к алгоритму получения псевдослучайных чисел.

1) полученная последовательность псевдослучайных чисел должна хорошо аппроксимировать последовательность случайных чисел заданным законом распределения
2) Слабая корреляционная связь между числами.
3) Простота алгоритма.

Существуют следующие методы получения псевдослучайных чисел квазиравномерным законом распределения:

1) Метод усечения
2) Метод произведения
3) Метод вычетов (конгруэнтный метод)

Конгруэнтный метод

Все конгруэнтные методы имитации случайных чисел полностью детерминированы, т.к. соответствующие вычислительные процессы однозначно определяют значения генерируемой последовательностью, т.е. для любой конгруэнтной процедуры можно получить формулу, позволяющую получить i-й член определяемой ею последовательности псевдослучайных чисел, не зная никаких членов кроме нулевых.

В основе конгруэнтных процедур генерирования псевдослучайных чисел лежит математическое понятие сравнения (два целых числа a и b сравнимы по модулю m, если их разность кратна числу m).

Все конгруэнтные методы опираются на разрешённую формулу:

$$n_{i+1} = \lambda n_i + \mu (\operatorname{mod} m) \text{ (1), где}$$

n_i, m, λ и μ - неотрицательные числа.

Пусть i принимает значения : $i = 0,1,2...$; тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= \lambda n_0 + \mu (\operatorname{mod} m) \\ n_2 &= \lambda n_1 + \mu (\operatorname{mod} m) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} & n \equiv \lambda^2 n_0 + (\lambda + 1)\mu (\operatorname{mod} m) \\ & n_i \equiv \lambda^i n_0 + \frac{\mu(\lambda - 1)}{(\lambda - 1)} (\operatorname{mod} m) \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, если даны начальные значения n_0, множитель λ и аддитивная константа μ. То выражение (2) определяет последовательность целых чисел $n_1, n_2 ... n_i$, составленную из остатков деления на m членов последовательности

$$\left\{ \lambda^i n_0 + \frac{\mu(\lambda^i - 1)}{(\lambda - 1)} \right\}$$

Отсюда вытекает, что для любого $i \geq 1, n_i < m$.

По целым числам последовательности n_i можно построить последовательность $\{r_i\}$, которая будет получена:

$$\{r_i\} = \left\{ \frac{n_i}{m} \right\}$$

последовательность рациональных чисел из единичного интервала.

Мультипликативные методы

Мультипликативный конгруэнтный алгоритм задаёт последовательность неотрицательных целых чисел n_i не превышающих m по формуле:

$$n_{i+1} = \lambda n_i (\operatorname{mod} m)$$

Эта формула представляет собой частный случай формулы (1), когда $\mu = 0$. Этот метод обладает достаточно хорошими статистическими характеристиками, выбирая соответствующим образом параметры λ и n_0. С его помощью можно получить последовательность равномерно распределённых некорелируемых случайных чисел (метод требует минимального объёма машинной памяти, и обладает при заданном модуле, периодом). Для численной реализации наиболее удобная версия алгоритма, в котором модуль $m = pl$, где

p - это основание системы;

l - длина машинного слова.

Выбор таким образом m удобен по двум причинам:

1) Выделение остатка m от деления сводиться к l младшим разрядам делимого
2) Легче прийти в интервал [0,1]

Смешанный конгруэнтный метод

Смешанная конгруэнтная процедура вычисляет последовательность n_i, не превосходящих заданную величину m по формуле (1). В отличии от мультипликативного метода параметр μ здесь не равен нулю.

Преимущество смешанной процедуры в том, что при данном m можно подобрать величины λ и μ, для которых формула (1) определяет последовательность, пробегающую все целые последовательности от 0 до $(n-1)$.

Превосходство смешанной процедуры над мультипликативной заключается в том, что свобода выбора параметра μ открывает возможности уменьшения серийной автокорреляции.

При построении периода максимальных чисел, учитываем:

1) рекомендуется выбрать число n_0 - произвольно и и нечётно.
2) коэффициент $\lambda = 8t \pm 3$, где t - любое целое положительное число.

Смешанная конгруэнтная процедура определяет последовательность псевдослучайных чисел с периодом $n = m$, если выполняется следующее условие:

1) μ и m - взаимнопростые числа
2) μ сравнима с 1 по модулю p: $\lambda \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$, если $m = p^l$
3) $\lambda \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$, если m делится на 4.

Уже упоминалась проблема сериальной корреляции (автокорреляции), в последовательностях псевдослучайных чисел, построенных с помощью мультипликативного или смешанного алгоритма. Доказано, что неправильный выбор параметров λ и μ приводит к сильной автокоррелированности. Используя их для имитации случайных величин с требуемыми распределениями, мы получаем выборку автокоррелирующих значений. Применение классических методов статистики к исследованию такой выборки, может дать заниженную оценку исследуемой величины. В настоящее время можно дать следующие рекомендации при разработке алгоритмов случайных чисел:

1) лучшим методом генерирования псевдослучайных чисел служит простой мультипликативный алгоритм с хорошо подобранным множителем.
2) Множитель λ фигурирующий в соотношении сравнения, не должен быть близок простому рациональному кратному модуля m. В противном случае возникает сериальная корреляция пар чисел.
3) Множитель λ не должен быть близок к простому рациональному кратному квадратного корня модуля m. Эта близость приводит к сериальным корреляциям троек чисел.
4) Не следует выбирать множитель λ так. Чтобы он содержал мало единиц в двоичном представлении.

Множитель λ должен быть достаточно велик.